POMORSKA LIGA ZADANIOWA *ZDOLNI Z POMORZA*

Konkurs dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych województwa pomorskiego

w roku szkolnym 2018/2019

Etap I – kwalifikacyjny

Przedmiot: matematyka

SCHEMAT OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Uwagi.

1. **W schemacie oceniania zapisano tylko przykładowe rozwiązania.**
2. **Za każdy inny poprawny sposób i pełne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.**

Zadanie 1. (0-6)

Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Przykładowe rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia:

v_A– prędkość, z jaką porusza się turysta idący z miasta A [km/h] ,

v_B– prędkość, z jaką porusza się turysta idący z miasta B [km/h] ,

$t+1$ – czas turysty idącego z miasta A do momentu spotkania z turystą idącym z miasta B [h] ,

$t-$ czas turysty idącego z miasta B do momentu spotkania z turystą idącym z miasta A [h] .

Do chwili spotkania turysta idący z miasta A przeszedł drogę s_1, a turysta idący z miasta B drogę s_2, gdzie $s_1+s_2=18$.

Wówczas droga przebyta przez turystów do spotkania:

$s_1=v_A\cdot(t+1)$, natomiast $s_2=v_B\cdot t$, gdzie: s_1 – droga pierwszego turysty, idącego z miasta A, a s_2 – droga drugiego turysty, idącego z miasta B.

Podobnie droga przebyta przez turystów po spotkaniu:

$s_1 = v_B \cdot 4$ oraz $s_2 = v_A \cdot 1{,}5$, gdzie: s_1 – droga drugiego turysty idącego dalej do miasta A, a s_2 – droga pierwszego, idącego dalej do miasta B.

Mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} v_A \cdot (t+1) = v_B \cdot 4 \\ v_B \cdot t = v_A \cdot 1{,}5 \\ 4v_B + 1{,}5v_A = 18 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} v_A \cdot (t+1) = v_B \cdot 4 \\ v_B \cdot t = v_A \cdot 1{,}5 \\ v_A \cdot (t+1) + v_B \cdot 4 = 18 \end{cases}$$

Mnożąc dwa pierwsze równania stronami przez siebie otrzymujemy:

$$v_A \cdot v_B \cdot t(t+1) = v_A \cdot v_B \cdot 4 \cdot 1{,}5$$

Stąd mamy równanie $t(t+1) = 6$, które po rozwiązaniu i odrzuceniu wyniku ujemnego daje rozwiązanie $t = 2$.

(Układ można rozwiązać także metodą podstawienia).

Po podstawieniu wartości $t = 2$, wyznaczamy prędkości turystów:

$$v_A = 4\frac{km}{h} \;\; i \;\; v_B = 3\frac{km}{h}.$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ………………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Wyznaczenie drogi pokonanej przez obu turystów do momentu spotkania:

$$s_1 = v_A \cdot (t+1) \;\; i \;\; s_2 = v_B \cdot t$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………………………………. 2 p.

Wyznaczenie drogi przebytej przez turystów po spotkaniu:

$s_1 = v_B \cdot 4$ oraz $s_2 = v_A \cdot 1{,}5$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………………...……… 3 p.

Zapisanie układu równań

$$\begin{cases} v_A \cdot (t+1) = v_B \cdot 4 \\ v_B \cdot t = v_A \cdot 1{,}5 \\ 4v_B + 1{,}5v_A = 18 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} v_A \cdot (t+1) = v_B \cdot 4 \\ v_B \cdot t = v_A \cdot 1{,}5 \\ v_A \cdot (t+1) + v_B \cdot 4 = 18 \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania prawie do końca ……………………………………………………………… 4 p.

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego wyznaczyć czas lub prędkość jednego z turystów, np. $t(t+1)=6$.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ………..……………..……..… 5 p.

Obliczenie czasu lub prędkości jednego z turystów, np. $t=2$.

Rozwiązanie pełne ………………………………………………….……….…………………… 6 p.

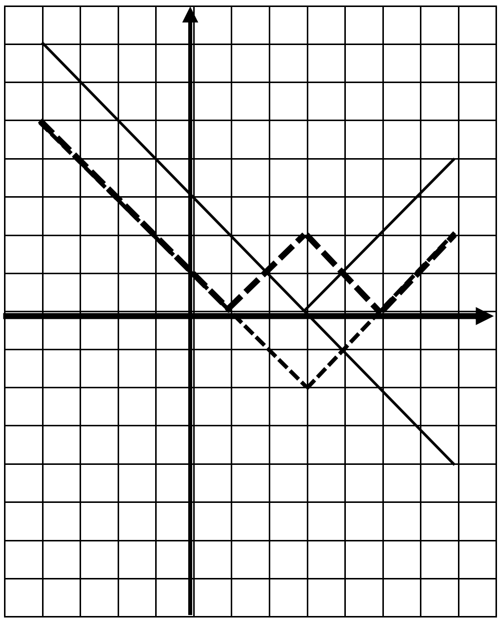
Wyznaczenie prędkości turystów:

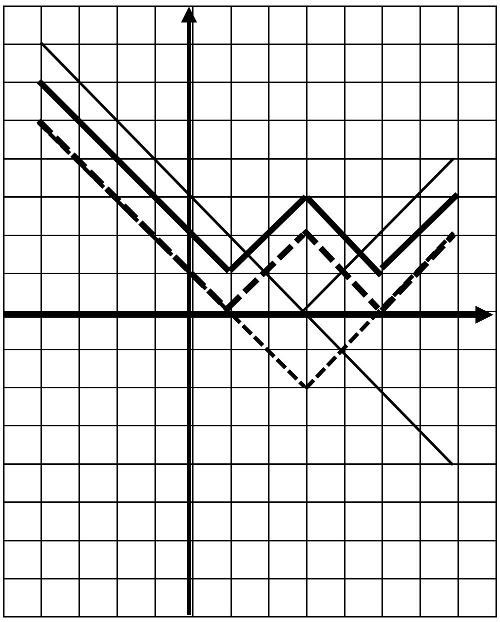
$v_A = 4\frac{km}{h}$ i $v_B = 3\frac{km}{h}$

Zadanie 2. (0-5)

Dla jakich wartości parametru a równanie $\big||3-x|-2\big| = a-1$ ma 4 rozwiązania?

Przykładowe rozwiązanie:





a) Obie strony równości traktujemy jako dwie funkcje: $f(x) = \big\|\|3-x\|-2\big\|$ i $f(x) = a-1$	b) Przekształcamy równość do postaci: $\big\|\|3-x\|-2\big\| + 1 = a$. Obie strony równości traktujemy jako dwie funkcje: $f(x) = \big\|\|3-x\|-2\big\| + 1$ i $f(x) = a$

W układzie współrzędnych sporządzamy w 4 etapach wykres funkcji $f(x) = \left\|\|3-x\|-2\right\|$	W układzie współrzędnych sporządzamy w 5 etapach wykres funkcji $f(x) = \left\|\|3-x\|-2\right\| + 1$
W układzie współrzędnych wykreślamy funkcję $f(x) = a - 1$	W układzie współrzędnych wykreślamy funkcję $f(x) = a$
Z analizy wykresu wynika, że prosta $f(x) = a - 1$ przecina funkcję *f*(*x*) w 4 punktach wtedy, gdy 0 < a – 1 < 2; stąd: 1 < a < 3 czyli $a \in (1; 3)$	Z analizy wykresu wynika, że prosta $f(x) = a$ przecina funkcję *f*(*x*) w 4 punktach wtedy, gdy: 1 < a < 3 czyli $a \in (1; 3)$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ………………………………………………………………………………………………........……. 1 p.

Przedstawienie na wykresie funkcji $f(x) = |3 - x|$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp …………………………………...………..….….……… 2 p.

Przedstawienie na wykresie funkcji $f(x) = |3 - x| - 2$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ………………………..…………………….….….……… 3 p.

Przedstawienie na wykresie funkcji $f(x) = \left||3 - x| - 2\right|$ lub $f(x) = \left||3 - x| - 2\right| + 1$

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………….…….……… 4 p.

Przedstawienie na wykresie funkcji/prostej $f(x) = a - 1$ albo $f(x) = a,$ w taki sposób, aby widoczne były 4 punkty przecięcia obu wykresów funkcji (4 rozwiązania).

<u>UWAGA:</u> Wykreślenie w dowolnym miejscu układu współrzędnych ww. wspomnianej prostej powoduje odjęcie 1 punktu.

Rozwiązanie pełne ………………………………………..………..…………………………….…… 5 p.

Przeprowadzenie analizy warunku i udzielenie odpowiedzi, że 1 < a < 3 lub $a \in (1; 3)$.

<u>UWAGA:</u> Jeżeli przesunięcie wykresu funkcji podstawowej równolegle do osi OY nastąpiło o inny wektor przesunięcia niż wskazuje zapis funkcyjny, a przy tym nie miało to wpływu na tok rozumowania – przyznajemy 4 punkty.

Jeżeli punktem wyjścia była inna funkcja, np. $f(x) = |k - x|$, gdzie *k* jest dowolną liczbą całkowitą, a dalsze rozumowanie jest poprawne, a uzyskane wartości parametru *a* są inne, ale wynikające z błędnie narysowanej funkcji pierwotnej – przyznajemy 4 punkty.

Zadanie 3. (0-7)

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Przykładowe rozwiązania:

a) Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

dla którego 1 + a + b + c =0 (*).

Niech pierwiastek wielomianu $x_1 = p$. Wtedy: $x_2 = p + 3$, $x_3 = p + 6$.

Wielomian można zapisać w postaci $W(x) = (x - p)(x - p - 3)(x - p - 6)$.

Po przekształceniu i zredukowaniu wyrazów podobnych wielomian ma postać:

$W(x) = x^3 + (-3p - 9)x^2 + (3p^2 + 18p + 18)x + (-p^3 - 9p^2 - 18p)$

Porównując wielomiany i ich współczynniki oraz własności współczynników wielomianu (*), otrzymujemy układ równań:

$$(**)\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases}$$

W rezultacie w wyniku dalszych operacji otrzymujemy równanie stopnia trzeciego:

$$p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$$

Rozwiązaniami tego równania są: $p_1 = 1$, $p_2 = -5$, $p_3 = -2$.

Po podstawieniu do pierwszych trzech równań układu równań (**), otrzymujemy wartości współczynników a, b, c wielomianu $W(x)$:

$$\begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \\ c = -28 \end{cases} \text{ albo } \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases} \text{ albo } \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

Inne rozwiązania:

b) Można skorzystać z własności, że pierwiastki wielomianu $x_1 = p$, $x_2 = p + 3$, $x_3 = p + 6$ spełniają wielomian. Wtedy mamy odpowiednio:

$$\begin{cases} p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \\ (p + 3)^3 + a(p + 3)^2 + b(p + 3) + c = 0 \\ (p + 6)^3 + a(p + 6)^2 + b(p + 6) + c = 0 \end{cases}$$

Kontynuując dalej przekształcanie układu równań, otrzymujemy układ równań (**). Kontynuujemy rozwiązywanie tego układu równań.

c) Można skorzystać z wzorów Viete'a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}, \qquad \text{wtedy: (***)} \begin{cases} p + p + 3 + p + 6 = -a \\ p(p+3) + (p+3)(p+6) + p(p+3) = b \\ p(p+3)(p+6) = -c \end{cases}$$

A następnie przekształcamy układ równań (***) do postaci układu równań (**).

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania …………………………………………………………………...……………………………........……. 1 p

Zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej: $W(x) = (x-p)(x-p-3)(x-p-6)$, gdzie $p,\ p+3,\ p+6$ są pierwiastkami tego wielomianu,

<u>albo</u> zapisanie układu równań: $\begin{cases} p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \\ (p+3)^3 + a(p+3)^2 + b(p+3) + c = 0, \\ (p+6)^3 + a(p+6)^2 + b(p+6) + c = 0 \end{cases}$

gdzie $p,\ p+3,\ p+6$ są pierwiastkami tego wielomianu,

<u>albo</u> zapisanie układu równań, korzystając z wzorów Viete'a:

$$\begin{cases} p + p + 3 + p + 6 = -a \\ p(p+3) + (p+3)(p+6) + p(p+3) = b \\ p(p+3)(p+6) = -c \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………...………………..….…………… 3 p.

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$

<u>albo</u> zapisanie układu równań: $\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases}$

UWAGA: W przypadku błędów rachunkowych, ale w zapisie układu równań widoczne są 3 (albo 4) zmienne – przyznajemy tylko 2 punkty.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …………………………..……………….…….…… 5 p.

Rozwiązanie układu równań, aby otrzymać równanie $p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$

<u>i także</u> wyznaczenie wszystkich rozwiązania równania: $p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$,

tj. $p_1 = 1,\ \ p_2 = -5,\ \ p_3 = -2$

UWAGA: Zapisanie wyłącznie równania bez wyliczenia jego rozwiązań – 4 punkty. Jeśli przy rozwiązywaniu równania wystąpią błędy rachunkowe – przyznajemy 4 punkty.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………….………. 6 p.

Rozwiązanie zadania do końca, przy czym popełnione zostały błędy rachunkowe,

albo wyznaczenie współczynników *a*, *b*, *c* tylko dla dwóch ciągów.

Rozwiązanie pełne …………………………………..…………………...……………….……… 7 p.

Wyznaczenie wszystkich 3 ciągów współczynników:

$\begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \\ c = -28 \end{cases}$ albo $\begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$ albo $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases}$

Zadanie 4. (0-6)

Wykaż, że równanie $\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)^{2x^2+x+1} = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}}$ posiada co najmniej 1 rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przykładowe rozwiązanie:

Mamy rozwiązać równanie:

(*) $\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)^{2x^2+x+1} = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}}$

Wyznaczamy dziedzinę równania (*): $x^2 - 1 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \ x \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 1;\ \infty)$.

Przekształcamy podstawę potęgi znajdującą się po lewej stronie równania (*). Korzystamy z wzorów skróconego mnożenia (kwadrat różnicy dwóch liczb), a następnie wykorzystujemy własność $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4\sqrt{5} + 2^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}}\right) = \frac{1}{\left|\sqrt{5}-2\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

Pozbywamy się postaci niewymiernej z mianownika ułamka, korzystając z wzoru na różnicę kwadratów:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}+2$$

Otrzymujemy równanie wykładnicze w postaci:

(**) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2x^2+x+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}}$

Na podstawie twierdzenia o równości potęg o tych samych podstawach mamy:

$2x^2+x+1=2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}$

Rozwiązujemy równanie: $x+1=\sqrt[3]{x^2-1}$, podnosząc obie strony do potęgi trzeciej.

Otrzymujemy równanie wielomianowe:

(***) $x^3+2x^2+3x+2=0$, którego jednym z rozwiązań jest $x=-1$.

Możemy więc równanie (***) zapisać w postaci: $(x+1)(x^2+x+2)=0$, gdzie $\Delta_{x^2+x+2}<0$

Tak więc równanie (*) posiada tylko jeden pierwiastek rzeczywisty czyli wykazano, że posiada ono co najmniej 1 rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ……………………………………………………………………………………………………..… 1 p.

Wyznaczenie dziedziny równania: $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\,-1\rangle\cup\langle 1;\,\infty)$

albo przekształcenie podstawy potęgi lewej strony równania

$$\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)=\cdots=\frac{1}{\left|\sqrt{5}-2\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp …………………………………………...………..….…… 2 p.

Wyznaczenie dziedziny równania: $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\,-1\rangle\cup\langle 1;\,\infty)$

i także przekształcenie podstawy potęgi lewej strony równania

$$\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)=\cdots=\frac{1}{\left|\sqrt{5}-2\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

albo przekształcenie podstawy potęgi do końcowej postaci:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)=\cdots=\frac{1}{\left|\sqrt{5}-2\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\cdots=\sqrt{5}+2$$

i także zapisanie równania wykładniczego w postaci: $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2x^2+x+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………………………...…… 4 p.

Zapisanie równania wykładniczego w postaci: $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2x^2+x+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Powołanie się na twierdzenie o równości potęg o jednakowych podstawach i zapisanie oraz rozwiązanie równania: $x+1=\sqrt[3]{x^2-1}$.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ………………..……………..…… 5 p.

Rozwiązanie zadania do końca i podanie jego pierwiastków (rozwiązań). Bez analizy dziedziny równania,

albo rozwiązanie równania z pewnymi usterkami rachunkowymi, niemającymi wpływu na przyjętą metodę rozwiązywania tego równania.

Rozwiązanie pełne ……………………………………………………………..........…………… 6 p.

Podanie rozwiązań równania $\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)^{2x^2+x+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2x^2+\sqrt[3]{x^2-1}}$ i wyznaczenie dziedziny równania. Sformułowanie wniosku końcowego.

Zadanie 5. (0-6)

W trójkącie prostokątnym ABC wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną AB ma długość *h*, a odcinek dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego C zawarty wewnątrz tego trójkąta ma długość *d*. Wyznacz długość przeciwprostokątnej.

Przykładowe rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia:

|AB| = *c*, |AC| = *b*, |BC| = *a*

D – punkt przecięcia dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego C z przeciwprostokątną AB,

P_1 i P_2 – pola trójkątów, na które dwusieczna poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła trójkąt ABC,

P – pole trójkąta ABC.

Ponieważ pole trójkąta ABC możemy policzyć na dwa sposoby, mamy więc: $\frac{hc}{2}=\frac{ab}{2}$, stąd $(*)$ $ab=hc$
Przyjmiemy, że: P_1 – pole trójkąta BCD, P_2 – pole trójkąta ACD. Możemy wtedy zapisać:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}ad\sin 45^o + \frac{1}{2}bd\sin 45^o = \frac{ad\sqrt{2}}{4} + \frac{bd\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{ad\sqrt{2}}{4} + \frac{bd\sqrt{2}}{4} = \frac{ab}{2}$$

Stąd $(**)$ $a + b = \frac{2ab}{d\sqrt{2}}$

Możemy wykorzystać twierdzenie Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$ i zapisać je w postaci $(a+b)^2 - 2ab = c^2$, gdzie po podstawieniu $(**)$ otrzymamy

$$c^2 = \left(\frac{2ab}{d\sqrt{2}}\right)^2 - 2ab$$

Po podstawieniu $(*)$ równanie przyjmie postać

$c^2 = \frac{4h^2c^2}{2d^2} - 2hc$, stąd mamy: $c^2\left(1 - \frac{4h^2}{2d^2}\right) = -2hc$, i dalej: $c\left(\frac{2d^2 - 4h^2}{2d^2}\right) = -2hc$

Przekształcając powyższe równanie otrzymamy:

$$c = \frac{2d^2h}{2h^2 - d^2}$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ……………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Wykorzystanie różnych wzorów na pole trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………………. 2 p.

Zapisanie wzorów na pola trójkątów P_1 *i* P_2 wykorzystujących kąt 45^o.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …………………………………………………… 3 p.

Zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć długość przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie zadania prawie do końca …………………………………………………………. 4 p.

Zapisanie równania zawierającego tylko dane wielkości h i d oraz poszukiwaną długość przeciwprostokątnej c, np.

$$c^2 = \frac{4h^2c^2}{2d^2} - 2hc$$

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ………..……………….…….… 5 p.

Rozwiązanie pełne ………………………………………………………………………………… 6 p.

Wyznaczenie długości przeciwprostokątnej

$$c = \frac{2d^2h}{2h^2 - d^2}$$